

**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 24.03.2023

Parte I - Testo 1

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui solli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.*

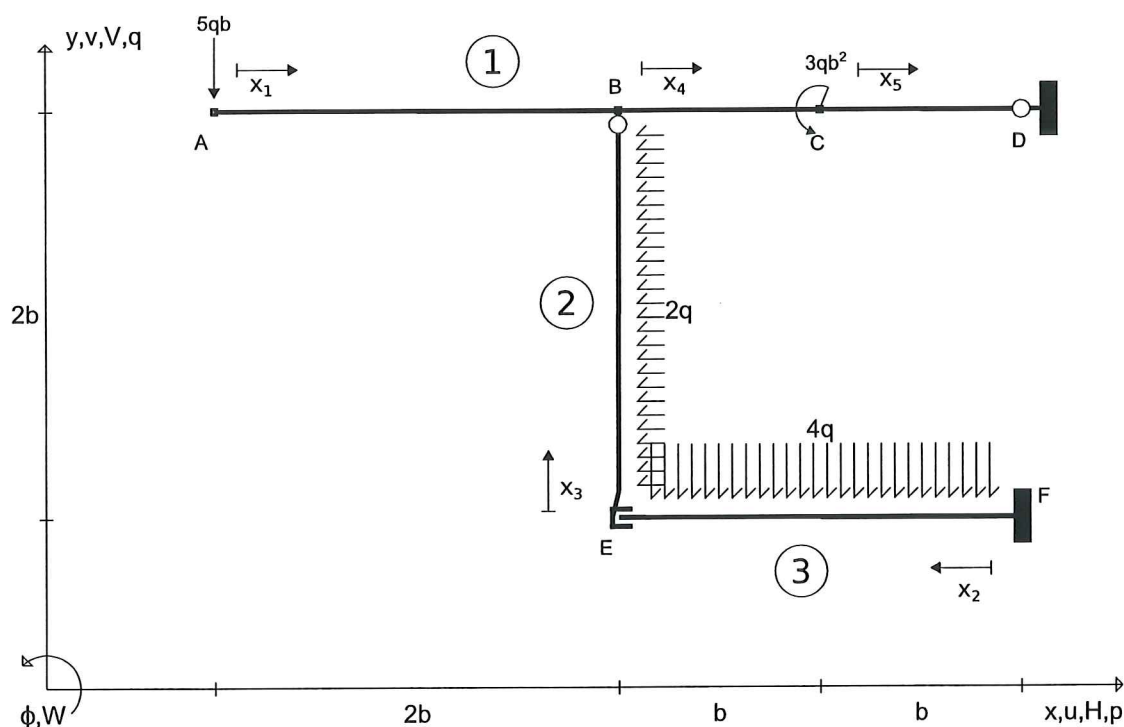
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 24.03.23\*001



EQ. AUXILIARE:

$$\begin{cases} \textcircled{1} \int M_z(B) = 0 ; \text{ oppure } \textcircled{2+3} \int M_z(B) = 0 \\ \textcircled{3} R_x = 0 ; \text{ oppure } \textcircled{1+2} R_x = 0 \end{cases}$$

## Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare  $H_A$  applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

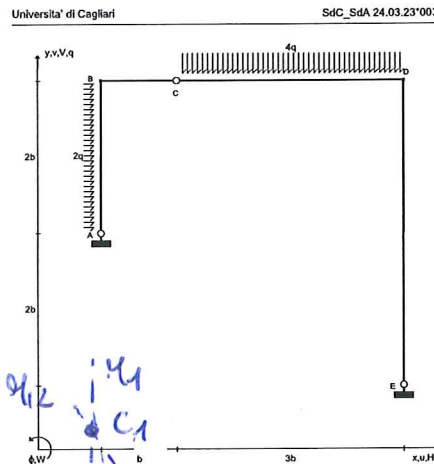
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine  $A$ ) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta  $ABC$ ),  $C_1$ , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta  $CDE$ ),  $C_2$ , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi,  $C_{12}$ ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $A$ ,  $u_A$ , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto  $C$ ,  $v_C$ .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto  $B$ ,  $M_B$ .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste  $AB$ ,  $BC$ ,  $CDE$ ) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $D$ ,  $u_D$ , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto  $D$ ,  $v_D$ .

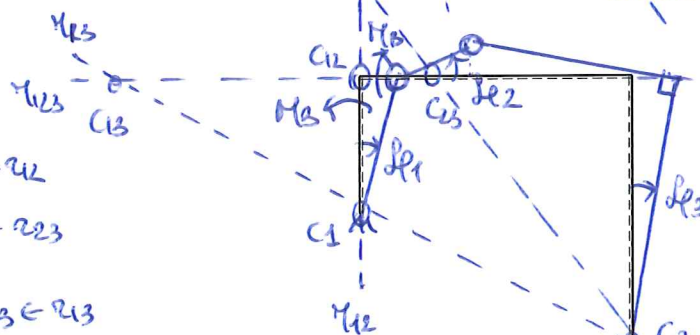
Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma:  $(\infty, m)$ , dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.



$$\begin{cases} C_1 \in \pi_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in \pi_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_C^{(1)} &= b \delta p_1 \\ v_C^{(2)} &= 3b \delta p_2 \\ v_C^{(1)} &= v_C^{(2)} \rightarrow \delta p_1 = 3 \delta p_2 \end{aligned}$$

$$H_A = \frac{10}{3} b \delta p_1$$



$$\begin{aligned} u_B^{(1)} &= 2b \delta p_1 \\ u_B^{(2)} &= 4/3 b \delta p_2 \\ u_B^{(1)} &= u_B^{(2)} \rightarrow \delta p_2 = 3/2 \delta p_1 \\ u_D &= 4b \delta p_3 \\ u_D &= u_B \rightarrow \delta p_3 = 2 \delta p_1 \\ v_D &= 0 \end{aligned}$$

$$H_A (\Rightarrow) = \dots -9b \dots; C_1 = (\dots 0 \dots, \dots 10/3b \dots); C_2 = (\dots 4b \dots, \dots -2b \dots); C_{12} = (\dots b \dots, \dots 2b \dots);$$

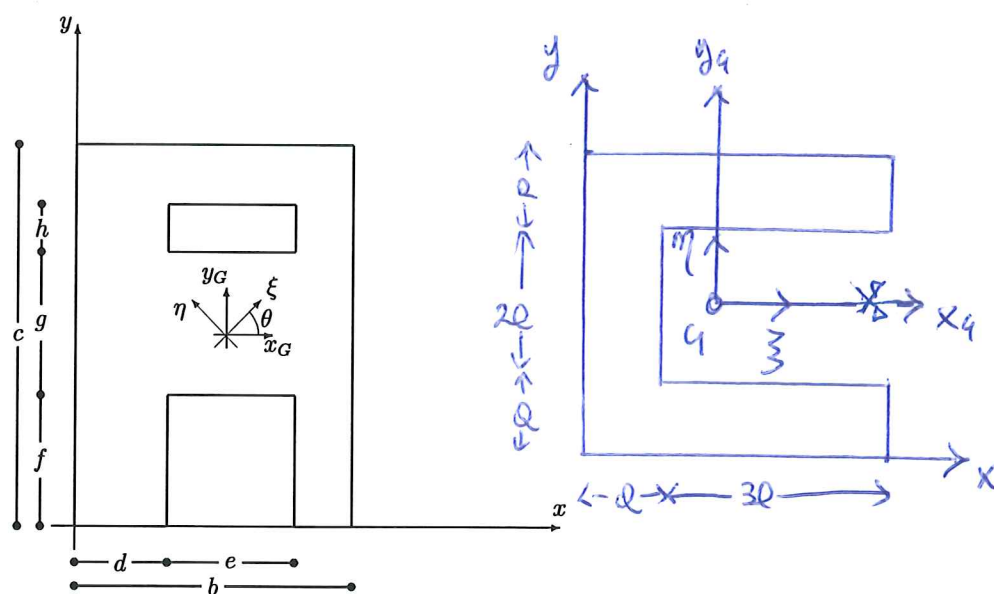
$$u_A = \dots 10/3b \delta p_1 \dots; v_C = \dots b \delta p_1 = 3b \delta p_2 \dots;$$

$$M_B (\curvearrowright) = \dots -2pb^2 \dots; u_D = \dots 4b \delta p_3 \dots; v_D = \dots 0 \dots;$$

### Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti:  $b = 4a$ ;  $c = 4a$ ;  $d = 1a$ ;  $e = 3a$ ;  $f = 0$ ;  $g = 1a$ ;  $h = 2a$  si richiede di:

- calcolare i momenti statici,  $S_x$  e  $S_y$  (rispetto agli assi  $x$  e  $y$  indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro  $x_G$  e  $y_G$  rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia  $J_{xG}$  e  $J_{yG}$  e il momento centrifugo  $J_{xGyG}$  rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia,  $J_\xi = J_{\max}$  e  $J_\eta = J_{\min}$  rispetto agli assi centrali d'inerzia,  $\xi$ ,  $\eta$ ;
- calcolare la tangente trigonometrica,  $\tan 2\theta$ , del doppio dell'angolo  $\theta$  formato dagli assi  $x_G$  e  $\xi$ .



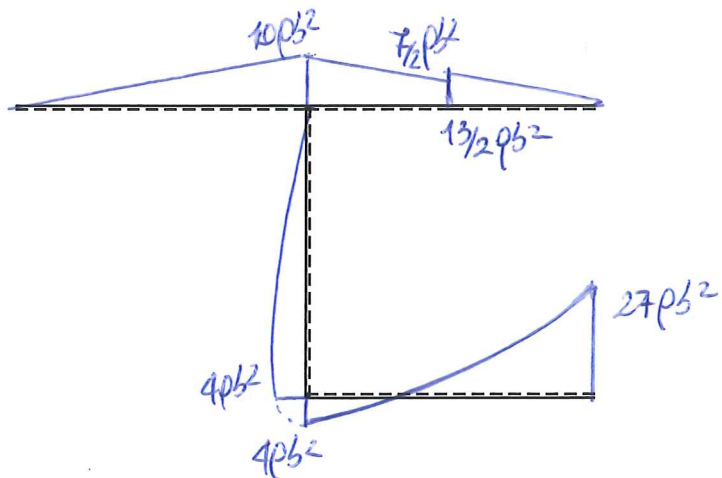
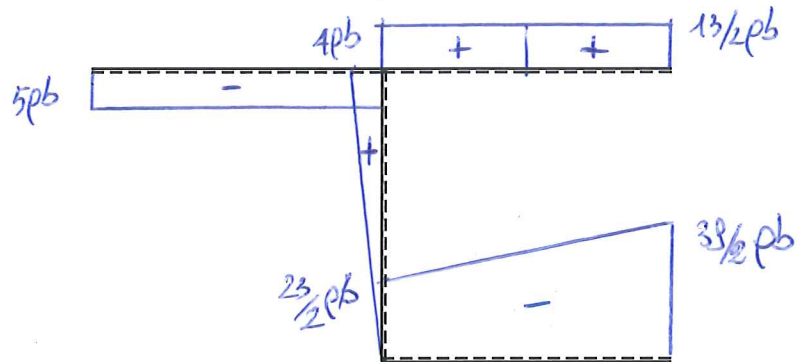
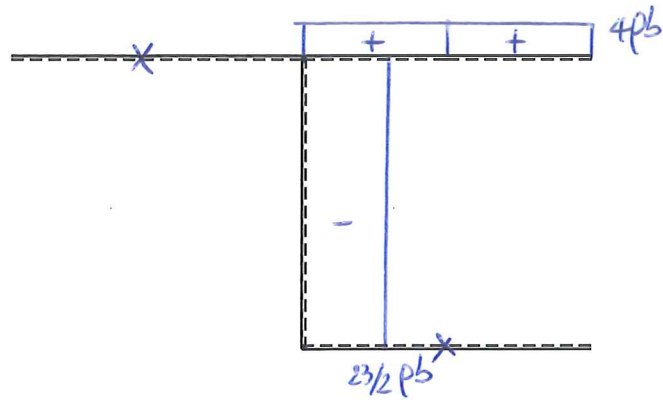
$$S_x = \dots 20,000 a^3 \dots; S_y = \dots 17,000 a^3 \dots;$$

$$x_G = \dots 1,700 a \dots; y_G = \dots 2,000 a \dots;$$

$$J_{xG} = \dots 58/3 a^4 = 19,333 a^4 \dots; J_{yG} = \dots 433/30 a^4 = 14,433 a^4 \dots;$$

$$J_{xGyG} = \dots 0 \dots; \tan 2\theta = \dots 0 [2\theta = 0] \dots;$$

$$J_\xi = J_{\max} = \dots J_{xG} = 58/3 a^4 \dots; J_\eta = J_{\min} = \dots J_{yG} = 433/30 a^4 \dots;$$



$$\begin{aligned}
 H_D (\Rightarrow) &= 4pb; & V_D (\uparrow) &= -13/2 pb; & H_F (\Rightarrow) &= 0; & V_F (\uparrow) &= 33/2 pb; & M_F (\curvearrowright) &= -27pb^2; \\
 N_{AB} &= 4pb; & T_{AB} &= -5pb; & M_{AB} &= -5pb \times 1; \\
 N_{BC} &= 4pb; & T_{BC} &= 13/2 pb; & M_{BC} &= -10pb^2 + 13/2 pb \times 4; \\
 N_{CD} &= 4pb; & T_{CD} &= 13/2 pb; & M_{CD} &= -13/2 pb^2 + 13/2 pb \times 3; \\
 N_{FE} &= 4pb; & T_{FE} &= -33/2 pb + 4p \times 2; & M_{FE} &= 27pb^2 - 33/2 pb \times 4 + 4p \times 4^2; \\
 N_{EB} &= -23/2 pb; & T_{EB} &= 2p \times 3; & M_{EB} &= -4pb^2 + p \times 5^2;
 \end{aligned}$$



**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 24.03.2023

Parte I - Testo 2

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.*

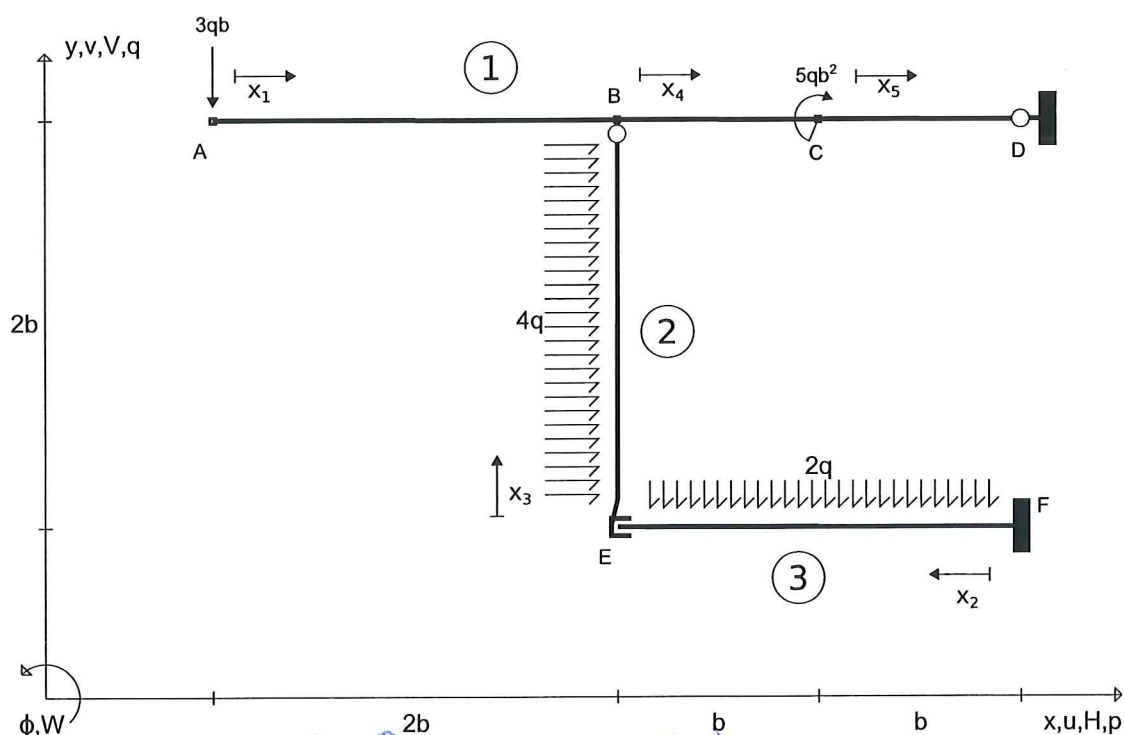
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 24.03.23\*002



EQ. ADESSUE:

$$\begin{cases} H_2^{(1)} = 0; \text{ oppure } H_2^{(2+3)} = 0 \\ R_x^{(3)} = 0; \text{ oppure } R_x^{(1+2)} = 0 \end{cases}$$

## Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare  $H_A$  applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

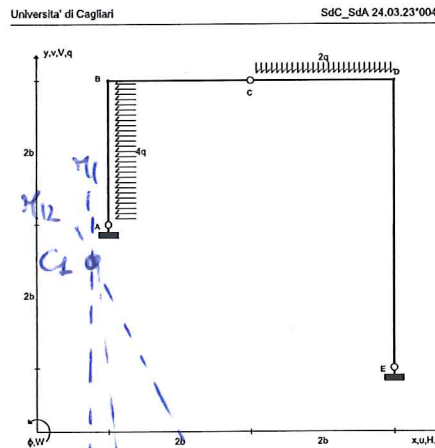
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine  $A$ ) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta  $ABC$ ),  $C_1$ , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta  $CDE$ ),  $C_2$ , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi,  $C_{12}$ ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $A$ ,  $u_A$ , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto  $C$ ,  $v_C$ .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto  $B$ ,  $M_B$ .

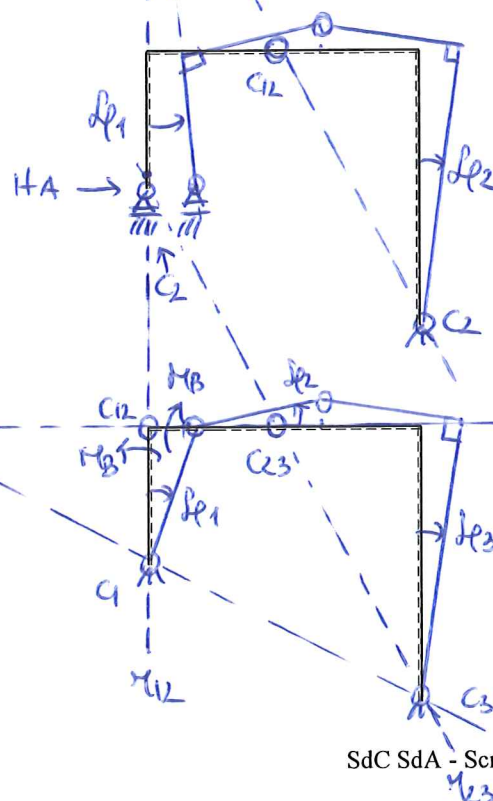
In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste  $AB$ ,  $BC$ ,  $CDE$ ) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto  $D$ ,  $u_D$ , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto  $D$ ,  $v_D$ .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma:  $(\infty, m)$ , dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.



$$\begin{cases} C_1 \in \pi_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_1 \in \pi_{12} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} v_C^{(1)} &= 2b \delta p_1 \\ v_C^{(2)} &= 2b \delta p_2 \\ v_C^{(1)} &= v_C^{(2)} \rightarrow \delta p_1 = \delta p_2 \\ u_A &= 6b \delta p_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in \pi_{12} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \quad C_2 \in \pi_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \quad C_{13} \in \pi_{13} \\ C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_{13} \quad C_{13} \in \pi_{123} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_B^{(1)} &= 2b \delta p_1 \\ u_B^{(2)} &= 4b \delta p_2 \\ u_B^{(1)} &= u_B^{(2)} \rightarrow \delta p_1 = 2 \delta p_2 \\ u_D &= 4b \delta p_3 \\ u_D &= u_B \rightarrow \delta p_3 = 2 \delta p_1 \\ v_D &= 0 \end{aligned}$$

$$H_A (\Rightarrow) = \frac{22}{3}pb; C_1 = (0, 6b); C_2 = (4b, -2b); C_{12} = (2b, 2b);$$

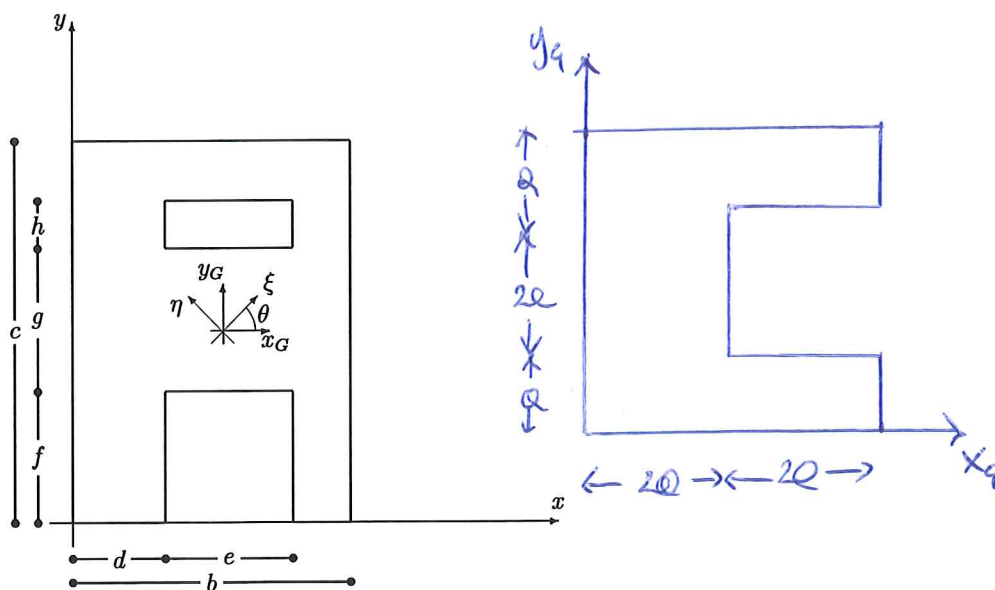
$$u_A = 6b\delta p_1; v_C = 2b\delta p_1 = 2b\delta p_2;$$

$$M_B (\curvearrowright) = \frac{20}{3}pb^2; u_D = 4b\delta p_3; v_D = 0;$$

### Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti:  $b = 4a$ ;  $c = 4a$ ;  $d = 2a$ ;  $e = 2a$ ;  $f = 0$ ;  $g = 1a$ ;  $h = 2a$  si richiede di:

- calcolare i momenti statici,  $S_x$  e  $S_y$  (rispetto agli assi  $x$  e  $y$  indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro  $x_G$  e  $y_G$  rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia  $J_{xG}$  e  $J_{yG}$  e il momento centrifugo  $J_{xGyG}$  rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia,  $J_\xi = J_{\max}$  e  $J_\eta = J_{\min}$  rispetto agli assi centrali d'inerzia,  $\xi$ ,  $\eta$ ;
- calcolare la tangente trigonometrica,  $\tan 2\theta$ , del doppio dell'angolo  $\theta$  formato dagli assi  $x_G$  e  $\xi$ .



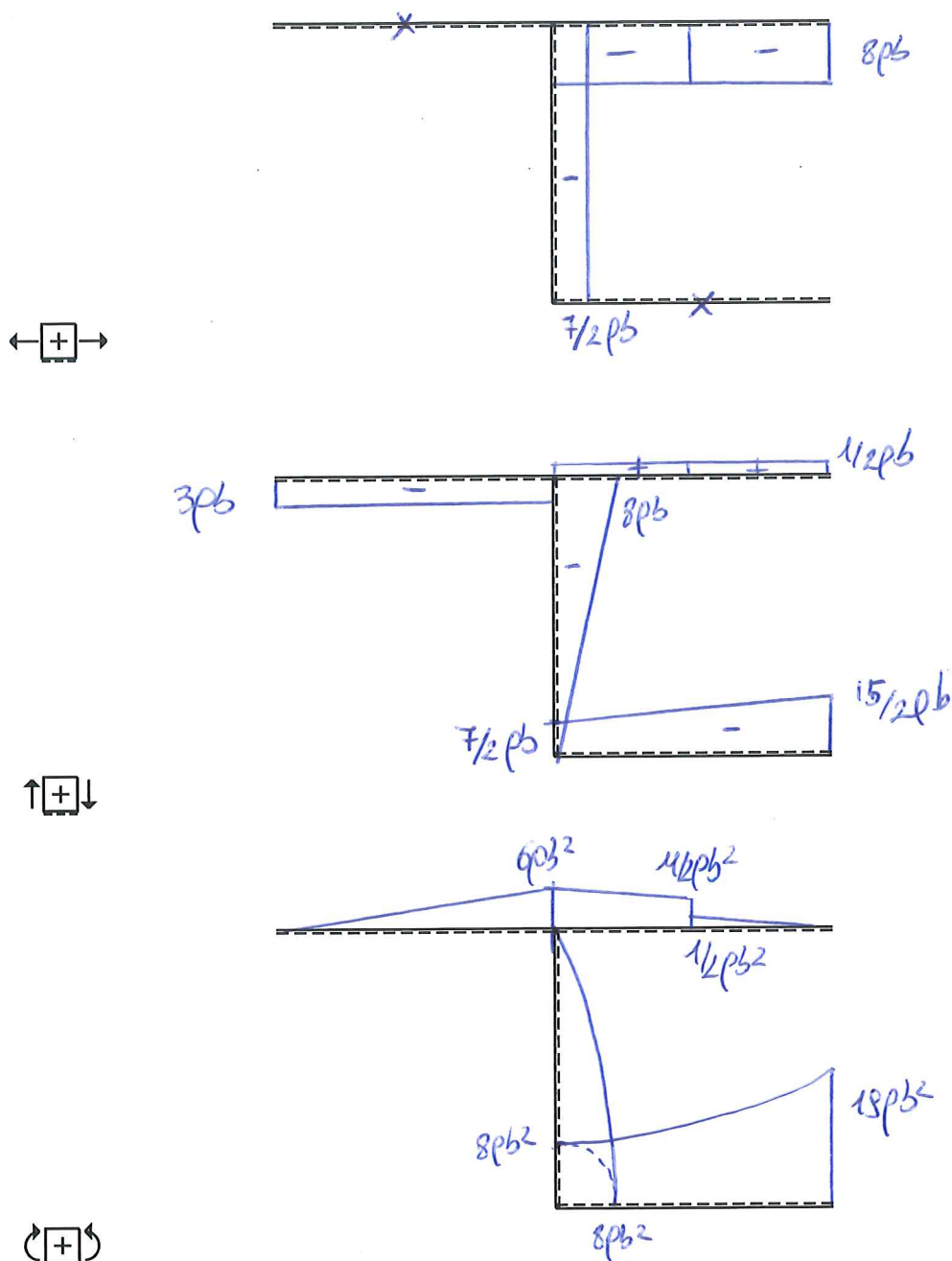
$$S_x = 24,000 a^3; S_y = 20,000 a^3;$$

$$x_G = \frac{5}{3}a = 1,666 a; y_G = 2,000 a;$$

$$J_{xG} = 20,000 a^4; J_{yG} = \frac{44}{3}a^4 = 14,666 a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 \quad [2\theta = 0];$$

$$J_\xi = J_{\max} = \frac{7}{3}a^4 = 20,000 a^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{44}{3}a^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_D (\Rightarrow) &= -8qb; & V_D (\uparrow) &= -1/2 qb; & H_F (\Rightarrow) &= 0; & V_F (\uparrow) &= 15/2 qb; & M_F (\curvearrowright) &= -18qb^2; \\
 N_{AB} &= -8qb; & T_{AB} &= -4q; & M_{AB} &= -3qb \times 1; \\
 N_{BC} &= -8qb; & T_{BC} &= -4q; & M_{BC} &= -6qb^2 + 1/2 qb \times 4; \\
 N_{CD} &= -8qb; & T_{CD} &= -4q; & M_{CD} &= -1/2 qb^2 + 1/2 qb \times 5; \\
 N_{FE} &= -8qb; & T_{FE} &= -15/2 qb + 2q \times 2; & M_{FE} &= 19qb^2 - 15/2 qb \times 2 + q \times 2^2; \\
 N_{EB} &= -7/2 qb; & T_{EB} &= -4q \times 3; & M_{EB} &= 8qb^2 - 2q \times 3^2;
 \end{aligned}$$